010610. ПРИЛОЖЕНИЕ К РАБОТАМ 010605 И 010606

В квантовой теории показано [3], что электронный газ, находящийся в равновесном состоянии, подчиняется статистике Ферми-Дирака

$$f_F = \frac{1}{\exp\left(\dfrac{E - E_F}{kT}\right) + 1}, \qquad (1)$$

где f_F - среднее число электронов, находящихся в состоянии с энергией E при температуре T и значении уровня энергии Ферми E_F.

Используя законы квантовой механики можно показать, что плотность квантовых состояний $g(E)$ при энергии E, массе частицы m и объеме тела V определяется выражением

$$g(E) = \frac{d\nu(E)}{dE} = 2\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E}, \qquad (2)$$

где $d\nu(E)$ - количество квантовых состояний в узком диапазоне энергий от E до $E + dE$. В формуле учтено, что в каждом энергетическом состоянии могут находиться два электрона, обладающих спинами разных знаков.

Число электронов, находящихся в этих состояниях, определяется, следовательно, выражением

$$dN(E) = f_F \cdot g(E)dE, \qquad (3)$$

где f_F и $g(E)$ даются формулами (1) и (2) соответственно.

В теории электронной эмиссии, кроме распределения по энергиям (3), для вычисления эмиссионного тока важно знать распределение электронов по скоростям. Сделав в (3) замены,

$$E = \frac{mv^2}{2}, \qquad dE = mvdv, \qquad E_F = \frac{mv_F^2}{2}$$

получим

$$dN(v) = \frac{8\pi Vm^3}{h^3} \cdot \frac{v^2 dv}{\exp\left[\dfrac{m}{2kT}\left(v^2 - v_F^2\right)\right] + 1}. \qquad (4)$$

Отсюда, учитывая, что в пространстве скоростей величина $4\pi v^2 dv$ равна объему шарового слоя, которому соответствует число электронов $dN(v)$, получим число электронов в элементе объема этого пространства $dv_x dv_y dv_z$:

$$dN(dv_x dv_y dv_z) = \frac{8\pi V m^3}{h^3} \cdot \frac{v^2 dv}{\exp\left[\frac{m}{2kT}\left(v^2 - v_F^2\right)\right] + 1} \cdot \frac{dv_x dv_y dv_z}{4\pi v^2 dv} =$$

$$= \frac{2Vm^3}{h^3} \cdot \frac{dv_x dv_y dv_z}{\exp\left[\frac{m}{2kT}\left(v^2 - v_F^2\right)\right] + 1}.$$

Для того чтобы получить распределение электронов по одной компоненте скорости, проинтегрируем полученное выражение по v_y и v_z в пределах от $-\infty$ до $+\infty$:

$$dN(v_x) = \frac{2Vm^3}{h^3} dv_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv_y dv_z}{\exp\left[\frac{m}{2kT}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - v_F^2\right)\right] + 1}.$$

Результат интегрирования имеет вид

$$dN(v_x) = \frac{4\pi m^2 V kT}{h^3} \cdot \ln\left\{1 + \exp\left[\frac{m}{2kT}\left(v_F^2 - v_x^2\right)\right]\right\} dv_x .$$

Отсюда получим число электронов, попадающих за единицу времени на единичную площадь, скорость которых лежит в диапазоне от v_x до $v_x + dv_x$ [1]:

$$d\nu(v_x) = \frac{4\pi m^2 kT}{h^3} v_x \cdot \ln\left\{1 + \exp\left[\frac{m}{2kT}\left(v_F^2 - v_x^2\right)\right]\right\} dv_x . \qquad (5)$$

Работа выхода

Выходу свободных электронов за пределы вещества препятствует электрическое поле, действующее в узкой области вблизи поверхности и создающее потенциальный барьер.

Для металлов возникновение поверхностного потенциального барьера объясняется, во-первых, действием индуцированного положительного заряда поверхности, которую покинул отрицательный электрон (так называемые, силы зеркального изображения), и, во-вторых, действием двойного электрического слоя, существующего на границе металл-вакуум благодаря электронному облаку у поверхности металла.

В диэлектриках возникновение потенциального барьера объясняется поляризацией молекул диэлектрика электрическим полем электрона, вылетающего в вакуум.

У полупроводников, кроме отмеченных выше механизмов, важную роль играют, так называемые, поверхностные состояния. Возможны ситуации, когда поверхность полупроводника будет отдавать электроны в объем вещества и, следовательно, заряжаться положительно, либо, наоборот, захватывать электроны из объема и заряжаться отрицательно. При этом возникает электрический поверхностный потенциал, величина и знак которого могут, в разных ситуациях, как затруднить, так и существенно облегчить выход электрона из полупроводника в вакуум.

Минимальная энергия, которой должен обладать электрон, чтобы, преодолев потенциальный барьер у поверхности вещества, оказаться в вакууме, имея нулевую кинетическую энергию, называется работой выхода электрона из данного вещества.

Плотность термоэлектронного тока

Если число электронов, выходящих изнутри катода через единичный по площади участок поверхности за единицу времени, равно N_ε, то плотность тока будет равна

$$j_\varepsilon = eN_\varepsilon, \qquad (6)$$

где e - элементарный заряд.

Если W_a - высота потенциального барьера у поверхности катода электронной лампы, то те электроны, для которых выполняется условие

$$\frac{mv_x^2}{2} \geq W_a, \qquad (7)$$

преодолеют потенциальный барьер и окажутся эмитированными. (Считаем, что ось X направлена перпендикулярно плоской поверхности катода в сторону анода). Значит, к аноду будут двигаться только электроны, скорость которых больше

$$v_x = \sqrt{\frac{2W_a}{m}}.$$

Для вычисления N_ε воспользуемся формулой (5), которую необходимо проинтегрировать с учетом условия (7)

$$N_\varepsilon = \frac{4\pi m^2 kT}{h^3} \int_{\sqrt{\frac{2W_a}{m}}}^{\infty} v_x \cdot \ln\left\{1 + \exp\left[\frac{m}{2kT}\left(v_F^2 - v_x^2\right)\right]\right\} dv_x$$

Поскольку величина

$$Z = \exp\left[\frac{m}{2kT}\left(v_F^2 - v_x^2\right)\right] << 1,$$

можно воспользоваться разложением логарифма в ряд

$$\ln(1+Z) = Z + \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} + \ldots,$$

ограничившись первым членом:

$$N_\varepsilon = \frac{4\pi m^2 kT}{h^3} \int_{\sqrt{\frac{2W_a}{m}}}^{\infty} v_x \exp\left[\frac{E_F}{kT} - \frac{mv_x^2}{2kT}\right] dv_x = \frac{4\pi mk^2}{h^3} T^2 \exp\left[-\frac{W_a - E_F}{kT}\right] = \qquad (8)$$

$$= \frac{4\pi mk^2}{h^3} T^2 \exp\left[-\frac{W_{эф}}{kT}\right]$$

Величина $W_{эф} = W_a - E_F$ называется эффективной работой выхода.

Используя для величины N_ε выражение (8), получим следующее выражение для плотности термоэлектронного тока:

$$j_{\varepsilon}=e\frac{4\pi mk^{2}}{h^{3}}T^{2}\exp\left[-\frac{W_{эф}}{kT}\right]=AT^{2}\exp\left[-\frac{W_{эф}}{kT}\right], \qquad (9)$$

где $A=\frac{4\pi mk^{2}e}{h^{3}}=120\cdot 10^{4}\ \frac{A}{м^{2}K^{2}}$.

Выражение (9) называется формулой Ричардсона-Дешмана.

Согласно законам квантовой механики электрон, пролетающий область потенциального барьера, имеет отличную от нуля вероятность отразиться от барьера, даже если для него выполняется условие (7). Как показывает расчет, для реально существующего потенциального барьера, имеющего форму монотонно возрастающей функции от координаты *X*, коэффициент прозрачности барьера D близок к единице: $D>0{,}95$ для металла. Следовательно, строго говоря, плотность термоэлектронного тока с учетом квантового эффекта отражения следует записывать в виде формулы

$$j_{\varepsilon}=DAT^{2}\exp\left[-\frac{W_{эф}}{kT}\right], \qquad (10)$$

где D - коэффициент прозрачности барьера.

Распределение эмитированных электронов

Электроны в катоде, способные к эмиссии, принадлежат к числу наиболее быстрых. Для быстрых электронов распределение в квантовой статистике при температуре $T>>0K$ совпадает с классическим распределением Максвелла. Важно выяснить, сохраняется ли это распределение после того, как электроны преодолели потенциальный барьер.

Обозначим скорость электронов в направлении оси *X* после преодоления барьера u_x. Тогда

$$\frac{mv_x^2}{2}-W_a=\frac{mu_x^2}{2}, \qquad (11)$$

где W_a - высота потенциального барьера.

Из (11) следует

$$v_x dv_x=u_x du_x. \qquad (12)$$

Тогда, переходя в формуле (5) к переменной u_x, применяя разложение логарифма в ряд, как это делалось при выводе формулы (8), используя (11), (12), а, также учитывая отражение от барьера, получим формулу для числа электронов, прошедших потенциальный барьер, и имеющих после этого скорость в диапазоне от u_x до u_x+du_x

$$d\nu_{u_x}=D\frac{4\pi m^{2}kT}{h^{3}}u_x\exp\left(\frac{E_F-W_a}{kT}-\frac{mu_x^2}{2kT}\right)du_x=Lu_x\exp\left(-\frac{mu_x^2}{2kT}\right)du_x, \qquad (13)$$

где $L=D\frac{4\pi m^{2}}{h^{3}}kT\exp\left(-\frac{W_{эф}}{kT}\right)$.

Если коэффициент прозрачности потенциального барьера D не зависит от скорости электронов, то формула (13) показывает, что распределение электронов остается максвелловским и после прохождения ими барьера. Для большинства катодов, особенно металлических ($D\approx 1$), это выполняется.

Учитывая формулу (8) для коэффициента L можно записать

$$L = D\frac{4\pi mk^2T^2}{h^3}\cdot\frac{m}{kT}\exp\left[-\frac{W_{эф}}{kT}\right] = DN_\varepsilon\frac{m}{kT}. \tag{14}$$

Теория метода задерживающего потенциала

Распределение электронов (13) можно экспериментально проверить, используя метод задерживающего потенциала (тормозящего поля). Если между анодом и катодом существует электрическое поле, тормозящее электроны (минус на аноде), то условие попадания электронов, имеющих скорость u_x, на анод можно записать в виде

$$\frac{mu_x^2}{2} \geq -eU_A, \tag{15}$$

где $-e$ - заряд электрона, причем тормозящее напряжение U_A считается отрицательным.

Для силы анодного тока I_A, при заданном значении тормозящего напряжения U_A, используя (13), (14) и (15) получим

$$I_A = S_K j_A = S_K eN_A = S_K e\int\limits_{\sqrt{-\frac{2eU_A}{m}}}^{\infty} u_x DN_\varepsilon\frac{m}{kT}\exp\left(-\frac{mu_x^2}{2kT}\right)du_x = \\ = [S_K eDN_\varepsilon]\exp\left(\frac{eU_A}{kT}\right) = I_\varepsilon\exp\left(\frac{eU_A}{kT}\right), \tag{16}$$

где S_K - площадь катода;

N_A - количество электронов, прошедших через единичную поверхность и достигших анода за единицу времени;

I_ε - сила анодного тока при нулевом значении тормозящего напряжения ($U_A = 0$), когда все электроны, прошедшие потенциальный барьер, попадают на анод вследствие наличия у них скорости в направлении анода.

В формуле (16) величина I_A пропорциональна количеству электронов N_A, энергия которых достаточна для попадания на анод при заданном тормозящем напряжении U_A. Величина I_ε пропорциональна общему количеству электронов N_ε, которые стремятся попасть на анод. При этом N_ε зависит от температуры катода, которая, как показали исследования, равна температуре электронного газа, эмитированного этим катодом.

Литература

1. В.И.Гапонов Электроника, Ч.1, М.: 1960.
2. Епифанов Г.И. Физика твердого тела – М.: Высшая школа, 1965.
3. Савельев И.В. Курс общей физики, т.3, М.: Наука, 1982.