НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

НИЛ техники эксперимента

КРАТКИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО КУРСУ
"ФИЗИКА"

www.opprib.ru
e-mail: info@opprib.ru

010404 - Вынужденные колебания в последовательном колебательном контуре

Цель работы: Изучение вынужденных колебаний и явления резонанса напряжений в последовательном колебательном контуре; изучение зависимости сдвига фаз колебаний от частоты; изучение закона Ома для цепи переменного тока.

Требуемое оборудование:

Модульный учебный комплекс: МУК-ЭМ1(2).

Приборы:

1. Генератор звуковых частот ЗГ1 — 1 шт.
2. Амперметр-вольтметр АВ1 — 1 шт.
3. Стенд с объектами исследования С3-ЭМ01 — 1 шт.
4. Комплект проводников — 1 шт.

Краткое теоретическое введение

Колебательное движение какого-либо физического объекта под действием периодической внешней силы называется вынужденным. Особый интерес представляют вынужденные колебания осцилляторов — систем, способных совершать свободные колебания. При этом может наблюдаться явление резонанса, имеющее исключительно большое практическое значение.

Примером такого осциллятора является последовательный колебательный контур, состоящий из катушки с индуктивностью *L*, конденсатора емкости *C* и резистора с сопротивлением *R*. Для возбуждения вынужденных колебаний последовательно с этими элементами в цепь включается источник переменной ЭДС (рис.1).

Пусть ЭДС источника изменяется по гармоническому закону

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_m\cos(\omega t) \tag{1}$$

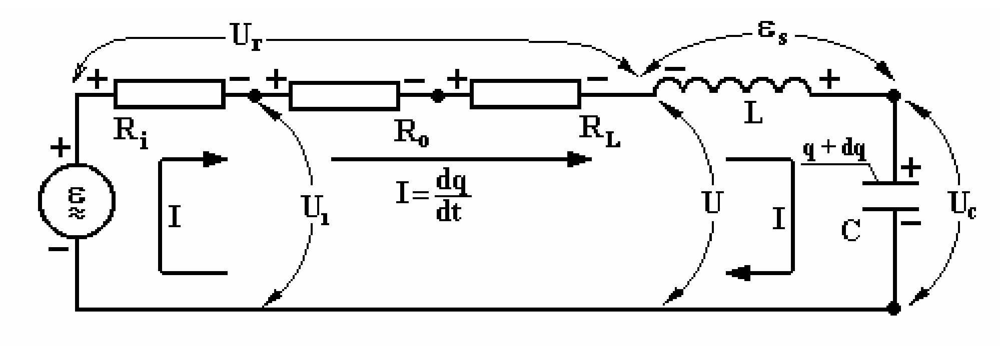

Рис. 1

Для замкнутого контура в каждый момент времени справедливо второе правило Кирхгофа, согласно которому, с учетом выбранных мгновенных направлений тока и полярности ЭДС, имеем

$$U_r + U_C = \varepsilon + \varepsilon_S \tag{2}$$

где $U_r = JR = R\dfrac{dq}{dt}$ — напряжение на общем активном сопротивлении контур;

$U_C = \dfrac{1}{C}q$ — напряжение на конденсаторе;

ε — ЭДС, создающая переменный ток в контуре;

$\varepsilon_S = -L\dfrac{dJ}{dt} = -L\dfrac{d^2q}{dt^2}$ — ЭДС самоиндукции в катушке.

Подставляя соответствующие выражения, после преобразований, получим:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}\cdot q = \frac{\varepsilon_m}{L}\cos(\omega t). \tag{3}$$

Поскольку при выполнении лабораторной работы, измеряемой величиной будет напряжение на конденсаторе, то перейдем в полученном уравнении к переменной U_C:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d(CU_C)}{dt} = C\frac{dU_C}{dt};$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = C\frac{d^2U_C}{dt^2}.$$

Кроме того, введем обозначения:

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC}, \quad \delta = \frac{R}{2L}.$$

В результате уравнение (3) приобретает вид

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + 2\delta\frac{dU_C}{dt} + \omega_o^2U_C = \varepsilon_m\omega_o^2\cos(\omega t), \tag{4}$$

где ω_o — циклическая частота собственных незатухающих колебаний в контуре, δ — коэффициент затухания.

Общее решение уравнения (4) складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения U_1 и любого частного решения U_2 неоднородного уравнения (4):

$$U_C = U_1 + U_2.$$

Известно [1], что, если $\delta < \omega_o$, U_1 равно

$$U_1 = Be^{-\delta t}\cos(\omega_{соб}t - \theta) \tag{5}$$

где $\omega_{соб} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — частота собственных затухающих колебаний осциллятора.
]

Амплитуда этих собственных колебаний $B\exp(-\delta\ t)$ зависит от начальных условий и от времени. Со временем она становится пренебрежимо малой, и в контуре остаются только вынужденные колебания U_2 , амплитуда которых от времени не зависит. В этом случае вынужденные колебания называют установившимися. Для них

$$U_C = U_2 .$$

Вынужденные колебания становятся с течением времени установившимися и в случае, когда выполняется обратное неравенство: $\delta\ >\ \omega_0$. Разница только в том, что функция $U_1(t)$ уменьшается со временем апериодически.

Частное решение уравнения (4) проще всего искать в комплексной форме, заменив в его правой части $\cos(\omega\ t)$ на $e^{i\omega t} = \cos(\omega\ t) + i\ \sin U_C = U_1 + U_2\ (\omega\ t)$. Найдя решение такого уровня в виде комплексной функции $\hat{U}$, нужно взять действительную часть, т.е. $\mathrm{Re}\hat{U}$, которая и будет искомым решением уравнения (4).

Будем искать частное решение уравнения

$$\frac{d^2\hat{U}}{dt_2} + 2\delta\frac{d\hat{U}}{dt} + \omega_o^2\hat{U} = \varepsilon_m\omega_o^2 e^{i\omega t} \tag{6}$$

в виде

$$\hat{U} = Ae^{i\omega t} \tag{7}$$

Подставляя предполагаемое решение (7) в (6), получим

$$\left(-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_o^2\right)Ae^{i\omega t} = \varepsilon_m\omega_o^2 e^{i\omega t}.$$

Сокращая на $e^{i\omega t}$ и, выражая A, найдем:

$$A = \frac{\varepsilon_m\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

Представим знаменатель этого выражения в показательном виде:

$$\omega_o^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega = |Z|e^{i\Psi}$$

Модуль этого выражения равен

$$|Z|=\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\left(2\delta\omega\right)^2}, \tag{8}$$

а аргумент определяется формулой

$$tg\Psi=\frac{2\delta\omega}{\omega_o^2-\omega^2}. \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в (7), найдем:

$$\hat{U}=\frac{\varepsilon_m\omega_o^2}{|Z|}e^{i\left(\omega\cdot t-\Psi_c\right)}$$

и, следовательно,

$$U_2=\mathrm{Re}\hat{U}=\frac{\varepsilon_m\omega_o^2}{|Z|}\cos\left(\omega t-\Psi_C\right) \tag{10}$$

В результате для установившихся вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе получаем:

$$U_C=U_2=\frac{\varepsilon_m\omega_o^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(2\delta\omega\right)^2}}\cos\left(\omega t-\Psi_C\right), \tag{11}$$

где Ψ_c — дает сдвиг фаз между колебаниями напряжения на конденсаторе и колебаниям ЭДС источника.

Из (11) видно, что амплитуда вынужденных установившихся колебаний U_c равна

$$U_{mC}=\frac{\varepsilon_m\omega_o^2}{\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+\left(2\delta\omega\right)^2}}=\frac{\varepsilon_m\omega_o^2/2\delta\omega}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_o}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\frac{\omega_o^2}{4\delta^2}}}. \tag{12}$$

Величина U_{mC} при $\omega=\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$ (резонансная частота) достигает максимума, который равен

$$U_{рез}=\frac{\varepsilon_m\omega_o^2}{2\delta\sqrt{\omega_o^2-\delta^2}}\approx\frac{\varepsilon_m\omega_o}{2\delta}, \tag{13}$$

причем последняя формула верна при $\delta << \omega_o$.

Необходимо отметить (проверьте это самостоятельно), что резонансная частота колебаний напряжения на катушке $\omega_{L\text{рез}}$ больше, чем $\omega_{C\text{рез}}$, и, следовательно, резонанс напряжения на LC цепочке наблюдается при промежуточной частоте.

$$\omega_{L\text{рез}} > \omega_{LC\text{рез}} > \omega_{C\text{рез}}$$

Уравнение (12) определяет форму амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) колебаний на конденсаторе, которую называют резонансной кривой (рис.2). Ширина и высота этой кривой зависят от коэффициента $\omega_{соб}^2 / 4\delta^2$. Эта величина называется **добротностью** колебательного контура Q.

Итак, добротность это

$$Q = \frac{\omega_{соб}}{2\delta} \approx \frac{\omega_0}{2\delta}. \tag{14}$$

Последнее выражение верно при $\delta << \omega_o$.

Приведем другие выражения для добротности [1], [2]

$$Q = \frac{\omega_o}{2\delta} = \frac{\pi}{\delta \mathrm{T}} = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{L\omega_o}{R_к} = \frac{1}{\omega_o R_к C}, \tag{15}$$

где λ - логарифмический декремент колебаний, $R_к$ - активное сопротивление контура.

Из (12), (13), (14) можно получить при $\omega_{рез} \approx \omega_o$

$$\frac{U_{mC}}{U_{рез}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_o}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}. \tag{16}$$

Ширина резонансной кривой зависит, таким образом, от добротности контура. При $Q >> 1$ резонансный максимум оказывается узким, так что в области резонанса

$$\frac{|\omega - \omega_o|}{\omega_o} = \frac{\Delta\omega}{\omega_o} << 1$$

В этом случае формула (16) принимает более простой вид:

$$\frac{U_{mC}}{U_{рез}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_o}\right)^2}}. \tag{17}$$

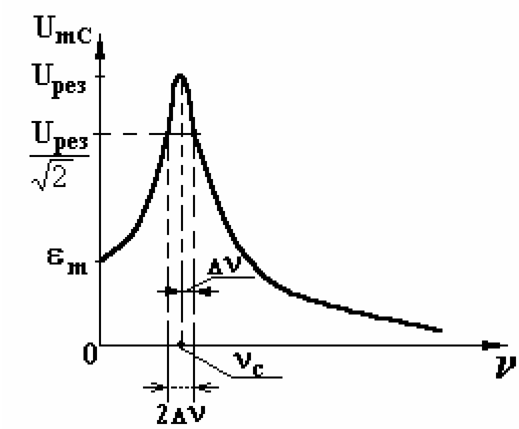

Рис. 2

Обычно ширина резонансной кривой $2\Delta\omega$ измеряется на уровне $U_{mC} = U_{рез}\big/\sqrt{2}$, что соответствует уменьшению мощности колебаний по сравнению с мощностью при резонансе в 2 раза. Подставляя в (17) $U_{mC} / U_{рез} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, найдем, что ширина резонансной кривой $2\Delta\omega$ на этом уровне и добротность Q связаны соотношением

$$Q = \frac{\omega_o}{2\Delta\omega} = \frac{\nu_o}{2\Delta\nu}, \qquad (18)$$

где $\nu_0 = \nu_c$ - резонансная частота. Из (18) видно, что добротность обратна относительной ширине резонансной кривой.

Из формул (13) и (14) следует, что

$$U_{рез} \approx \frac{\varepsilon_m \omega_o}{2\delta} = \varepsilon_m Q. \qquad (19)$$

Следовательно, добротность равна отношению резонансного напряжения $U_{рез}$ на конденсаторе к амплитуде напряжения источника ЭДС ε_m:

$$Q = \frac{U_{рез}}{\varepsilon_m}, \qquad (20)$$

т.е. характеризует не только ширину, но и высоту резонансного пика.

Вернемся к рассмотрению цепи, изображенной на рис.1. Пусть ЭДС источника изменяется по закону

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi). \qquad (21)$$

Воспользовавшись вторым правилом Кирхгофа (2) и, считая искомой величиной силу тока, получим:

$$L\frac{dJ}{dt}+RJ+\frac{1}{C}\int J\,dt=\varepsilon_m\cos(\omega t+\varphi). \qquad (22)$$

Используя комплексное представление правой части (см. (6), (7)) и, считая искомую величину комплексным числом, вместо (22) запишем:

$$L\frac{d\hat{J}}{dt}+R\hat{J}+\frac{1}{C}\int\hat{J}\,dt=\hat{\varepsilon}_m e^{i\omega t}, \qquad (23)$$

где $\hat{\varepsilon}_m=\varepsilon_m e^{i\varphi}$.

Будем искать частное решение уравнения (23) в виде:

$$\hat{J}=\hat{J}_m e^{i\omega t}. \qquad (24)$$

Подставляя (24) в (23) и, сокращая на $e^{i\omega t}$, получим:

$$\hat{J}_m\left[R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]=\hat{\varepsilon}_m. \qquad (25)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, носит название **импеданса** контура и обозначается $\hat{Z}$:

$$\hat{Z}=R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right). \qquad (26)$$

Выражение для $\hat{Z}$ определяется только свойствами пассивных элементов, входящих в состав контура. Подставляя (26) в (25) получим:

$$\hat{\varepsilon}_m=\hat{Z}\hat{J}_m. \qquad (27)$$

Это выражение является законом Ома для переменного тока. Роль сопротивления здесь играет $\hat{Z}$.

Выражение для величины $\hat{Z}$ содержит действительную часть, называемую **активным сопротивлением**, и мнимую часть, называемую **реактивным сопротивлением.**

Из формулы (26) видно, что импеданс идеального резистора равен R, идеальной катушки $i\omega L$, идеального конденсатора $\frac{-i}{\omega C}=\frac{1}{i\omega C}$.

Представим импеданс $\hat{Z}$ в показательной форме:

$$\hat{Z}=Z_o e^{i\psi_I}, \tag{28}$$

где $Z_o=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$, $\Psi_I=arctg\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$.

Из (24), (27) и (28) получим, переходя к действительному выражению для силы тока:

$$J=\mathrm{Re}\left(\hat{\mathcal{E}}_m e^{i\omega t}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_m}{\hat{Z}}e^{i\omega t}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon_m e^{i\varphi}}{Z_o e^{i\Psi}}e^{i\omega t}\right)=\frac{\varepsilon_m}{Z_o}\cos\left(\omega t+\varphi-\Psi_I\right) \tag{29}$$

Сравнивая (29) и (21) видим, что ток отстает по фазе от ЭДС генератора на величину Ψ_I.

Рассмотрим важные частные случаи.

а) В цепь включено только сопротивление R. Тогда из (28) следует, что $\Psi_I=0$. Колебания тока в активном сопротивлении совпадают по фазе с колебаниями напряжения на нем.

б) В цепь включена только емкость C (конденсатор без утечки), из (28) $\Psi_I=-\frac{\pi}{2}$. Ток по фазе опережает напряжение на $\frac{\pi}{2}$ радиан.

в) В цепь включена только индуктивность L (катушка, активным сопротивлением которой R_L можно пренебречь). Из выражения (28) следует, что $\Psi_I=\frac{\pi}{2}$. Ток цепи отстает по фазе от напряжения на $\frac{\pi}{2}$ радиан. Если же $R_L \neq 0$, то $\Psi_I<\frac{\pi}{2}$.

Если теперь рассмотреть цепочку, состоящую из резистора, конденсатора и катушки, в каждом из которых сила тока J за счет последовательного соединения колеблется в одинаковой фазе, то сдвинутыми по фазе относительно друг друга окажутся напряжения на каждом из этих элементов цепи. При этом напряжения на идеальной емкости и идеальной индуктивности всегда окажутся сдвинутыми относительно друг друга по фазе на π радиан (колебания U_C и U_L - противофазные).

Зависимость разности фаз от частоты вынужденных колебаний называется фазочастотной характеристикой (ФЧХ). На рис.3 представлены ФЧХ для емкости $\Delta\varphi_c$, индуктивности $\Delta\varphi_L$ и LC цепочки $\Delta\varphi_L$ по отношению к колебаниям источника ЭДС.

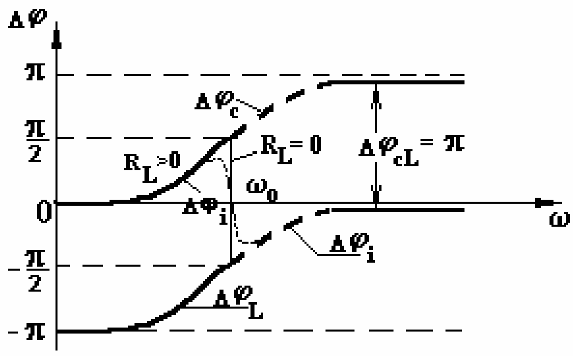

Рис. 3

Из формулы (29), кроме того, следует, что при любых значениях активного сопротивления R максимум амплитуды колебаний силы тока достигается при условии $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$.

Следовательно, резонансная частота для силы тока равна собственной частоте незатухающих колебаний контура: $\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_o$.

Методика проведения экспериментов

На рис.4 показана схема измерений амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) и фазочастотной характеристики (ФЧХ) контура с применением осциллографа (ОСЦ). Предполагается, что осциллограф имеет два канала, один из которых может включаться как на вертикальное, так и на горизонтальное отклонение луча.

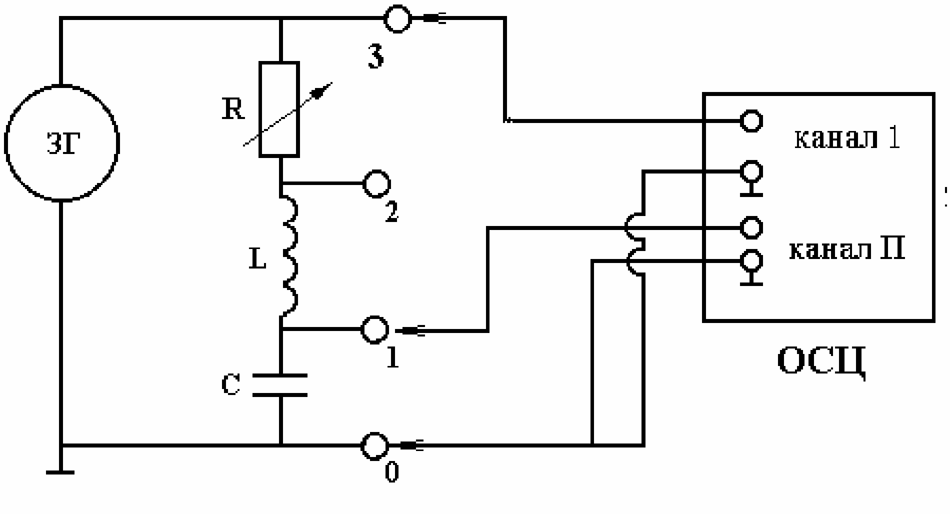

Рис. 4

Звуковой генератор ЗГ подключен к последовательно соединенным переменному резистору R, катушке индуктивности L и конденсатору C. Канал I осциллографа подключен к точкам 0 - 3, т.е. измеряет переменное напряжение на выходе ЗГ. Канал П может быть подключен либо к точкам 0 - 1, чтобы измерять напряжение на конденсаторе, либо к точкам 0 - 2, чтобы измерять напряжение на LC - цепочке. Сигналы, поступающие на оба канала, могут наблюдаться одновременно. Включение генератора развертки осциллографа позволяет проследить изменение напряжений со временем.

Амплитуда колебаний напряжения, поступающего на каналы осциллограф, определяется по делениям шкалы, закрепленной на экране, с учетом цены деления этой шкалы и множителя, указанных около ручек управления осциллограф.

Разность фаз колебаний напряжений, подаваемых на каналы осциллограф, может быть определена двумя способами. Во-первых, путем определения сдвига одного сигнала по отношению к другому в горизонтальном направлении. Во-вторых, путем сложения сигналов как взаимно перпендикулярных гармонических колебаний с одинаковой частотой.

Рекомендуемое задание к работе

1. Соберите схему рис.4. При этом рекомендуется выбрать номер конденсатора в соответствие с номером учебной бригады, в которую Вы входите (см. таблицу). Следить, чтобы клеммы «земля» каналов осциллографа и ЗГ были подключены к общей точке. Канал II подключите к выбранному конденсатору (точки 0 - 1). Генератор развертки должен быть включен.
2. Установите сопротивление переменного резистора вначале на ноль $R = 0$. Ручку напряжения ЗГ установите в среднее положение.
3. Получите на экране одновременно два гармонических сигнала. Меняя частоту ЗГ определите резонансную частоту ν_c, при которой амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе U_{mC} достигает наибольшего значения.
4. Для известных значений емкости конденсатора C и индуктивности катушки L рассчитайте резонансную частоту без учета активного сопротивления катушки. Сравните с частотой, найденной экспериментально. Объясните возможное различие.
5. Определите, сравнивая сигналы, разность фаз между колебаниями напряжения на генераторе и на конденсаторе при резонансе, сравните с величиной разности фаз, полученной теоретически. Измерив с помощью осциллографа $U_{mC\ рез}$ и ε_m, вычислите добротность контура по формуле (20).
6. Выполните измерения по определению зависимости амплитуды колебаний напряжения на конденсаторе U_{mC} от частоты ν при R=0. По полученным данным постройте амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) $U_{mC} = f(\nu)$.
7. Проведите аналогичные измерения для сопротивления, значение которого для каждой бригады указано в таблице. Проведите анализ полученных результатов.
8. Выполните измерения по определению зависимости разности фаз колебаний ЭДС и напряжения на конденсаторе U_{mC} от частоты ν при R=0. По полученным данным постройте фазочастотную характеристику (ФЧХ) $\Delta\varphi_C = f(\nu)$.
9. Проведите аналогичные измерения для сопротивления, значение которого для каждой бригады указано в таблице. Проведите анализ полученных результатов.
10. Измените точку подключения канала II, подсоединив его к концам LC цепочки (точки 0-2).
11. Выполните измерения по определению зависимости амплитуды колебаний напряжения на LC цепочке U_m от частоты.
12. По полученным в п.16 данным постройте АЧХ. Объясните резкое различие этих графиков от графиков, полученных ранее для RC цепочки.
13. Выполните измерения по определению зависимости разности фаз $\Delta\varphi_1$ на LC цепочке от частоты.
14. По полученным в п.13 данным постройте ФЧХ.

июнь 2010