www.opprib.ru
e-mail: info@opprib.ru

010114. Математический маятник

Цель работы: Изучить гармонические колебания на примере движения математического маятника. Определить ускорение свободного падения при помощи математического маятника.

Требуемое оборудование: Модульный учебный комплекс МУК-М1

Краткое теоретическое введение

Колебания – движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Колебания представляют собой один из наиболее распространенных видов движений в природе и технике.

Колебания могут быть разной природы: механические, электромагнитные, электромеханические и другие. В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают: свободные (или собственные), затухающие, вынужденные, а также автоколебания и параметрические колебания.

- *Свободными* или *собственными* называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия.
- *Вынужденными* называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы.
- *Автоколебания*, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешней силы; однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой – система сама управляет внешним воздействием.
- При *параметрических* колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы.

Простейшим видом колебаний являются *гармонические* колебания. Это такие колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется по закону синуса (или косинуса). Этот вид колебаний особенно важен, так как многие колебания часто имеют характер, очень близкий к гармоническим колебаниям. Периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

Уравнение гармонических колебаний можно представить в виде:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (1)$$

Поскольку косинус изменяется в пределах от -1 до +1, значения $x(t)$ лежат в пределах от $-A$ до $+A$. Наибольшая величина отклонения от положения равновесия A называется *амплитудой колебаний*. Амплитуда A – постоянная положительная величина $A=|x_{max}|$. Аргумент косинуса - величина $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$, называется *фазой колебаний*.

Постоянная величина φ_0 представляет собой значение фазы в момент времени $t = 0$ и называется *начальной фазой* колебаний. С изменением начала отсчета времени изменяется и φ_0. Следовательно, значение начальной фазы определяется выбором начала отсчета времени. Так как значения $x(t)$ не изменяется при добавлении или вычитании из фазы целого числа 2π, всегда можно добиться того, чтобы начальная фаза была по модулю меньше π. Поэтому обычно рассматриваются только значения φ_0, лежащие в пределах от - π до + π.

Период гармонического колебания T это такой промежуток времени, за который фаза колебаний получает приращение, равное 2π, т.е. совершается *одно полное колебание*. По истечении времени T, соответствующего периоду колебания, движущаяся точка занимает своё прежнее положение. Следовательно, период колебания T определяется из условия:

$$[\omega_0(t+T)+\varphi_0]-(\omega_0 t+\varphi_0)=2\pi$$

откуда:

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0} \tag{2}$$

Величина ω_0 - называется *собственной циклической частотой* гармонических колебаний. Значение ω_0 равно числу колебаний за 2π секунд. Величина ν_0, обратная периоду колебаний – называется *собственной частотой колебаний*.

$$\nu_0=\frac{1}{T}=\frac{\omega_0}{2\pi}\left[\frac{1}{c}\right] \tag{3}$$

В качестве примера колебательного движения, поясняющего физические условия, при которых совершаются гармонические колебания, может служить движение математического маятника.

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на одном конце которой прикреплена масса, сосредоточенная в одной точке. Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити, при условии, что радиус шарика много меньше длины нити l . Если маятник отклонить от положения равновесия на небольшой угол α (α– угол, образованный нитью с вертикалью) и отпустить его, то маятник начнет совершать колебательное движение (рис. 1 а).

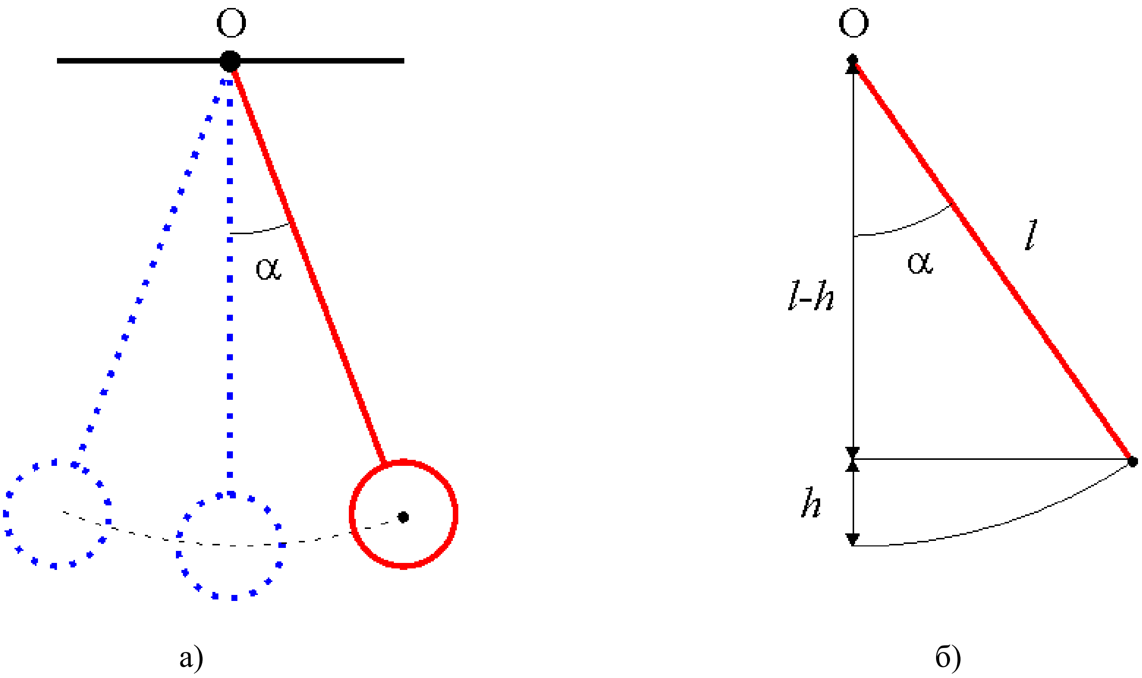

Рис.1.

Получить уравнение колебаний математического маятника можно исходя из закона сохранения энергии. Поскольку маятник совершает только вращательное движение с угловой скоростью ω в поле действия силы тяжести, то можно записать:

$$\frac{J\omega^2}{2} + mgh = const \tag{4}$$

где J – момент инерции маятника;
m – масса маятника;
h – высота подъема груза.

Исходя из рис.1 б

$$l\cos\alpha = l - h$$
$$h = l(1 - \cos\alpha)$$

Разложим в ряд до второго члена *cos(α)* и подставим предыдущее выражение:

$$h = l\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!}\right)\right) = l\frac{\alpha^2}{2}$$

Перепишем выражение (4), продифференцировав части равенства по t:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{mgl\alpha^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}(const)$$

Упростив, получим

$$J\omega\frac{d\omega}{dt} + mgl\alpha\frac{d\alpha}{dt} = 0$$

Учитывая, что $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$, получим

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0 \tag{5}$$

т.к. для математического маятника $J = ml^2$, и обозначив $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ получим:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0 \tag{6}$$

Решением данного дифференциального уравнения является функция (убедиться в справедливости решения (7) можно путем непосредственной подстановки его в уравнение (6)):

$$\alpha = \alpha_{\max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{7}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – собственная циклическая частота колебаний математического маятника;

α_{max} – максимальное значение α;
φ_0 – начальная фаза.

Из предыдущего выражения вытекает, что собственная циклическая частота колебаний математического маятника зависит только от длины маятника и ускорения свободного падения. Учитывая связь между собственной циклической частотой математического маятника и периодом колебаний, получим выражение для периода:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{8}$$

Таким образом, зная величину l и измерив T, можно найти ускорение свободного падения.

Методика эксперимента

Определять ускорения свободного падения с помощью математического маятника на практике лучше графическим методом. Для этого необходимо по полученным экспериментальным данным построить график зависимости квадрата периода колебаний маятника от длины нити $T^2=f(l)$ (рис.2).

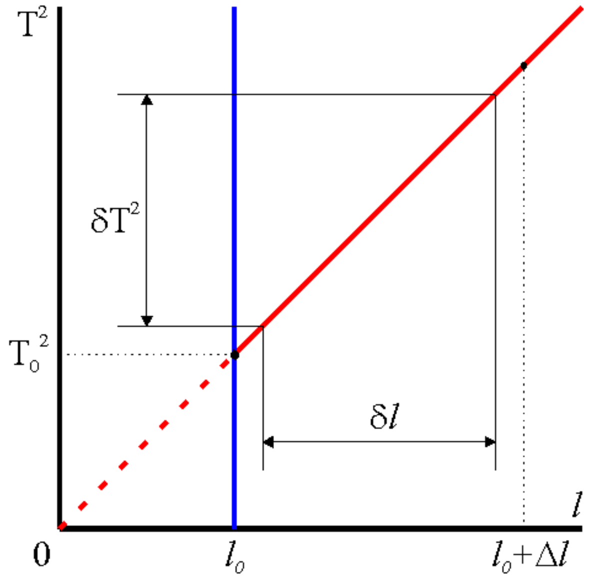

Рис.2

По тангенсу угла наклона полученного графика к оси T^2 можно определить среднюю величину ускорения свободн6ого падения g .

$$g = (2\pi)^2 \frac{\delta l}{\delta(T^2)} \tag{9}$$

где δl и δT^2 – приращения графика функции $T^2=f(l)$ по соответствующим осям.

В реальной лабораторной установке груз это не материальная точка и, следовательно, точное определение длины подвеса невозможно. Поскольку для определения g требуется нахождение приращений δl и δT^2 , то можно перенести начало координат 0 в точку l_0. и измерять изменение длины Δl относительно l_0. на каждом шаге измерений. Таким образам, построив график зависимости $T^2=f(\Delta l)$ можно найти значение ускорения свободного падения по формуле:

$$g = (2\pi)^2 \frac{\delta(\Delta l)}{\delta(T^2)} \qquad (10)$$

Если продлить характеристику $T^2=f(\Delta l)$ до пересечения с осью Δl то можно найти истинное значение l_0. Достоинством этого метода является то, что он позволяет исключить систематическую ошибку в определении длины подвеса.

Все измерения проводятся с помощью модульного учебного комплекса МУК-М1.

Нить наматывается на малый шкив барабана и фиксируется с помощью специального крючка, который расположен на большом шкиву.

Расчет значений приращение длины производить исходя из условия, что минимальная длина подвеса l_0.соответствует максимально измеренному значению x_{max} (рис.3): Таким образом, $\Delta l=x_{max} - x_i$

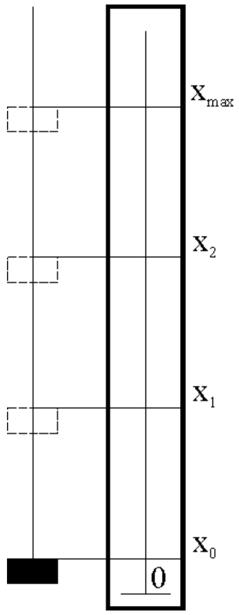

Рис.3

Для проведения измерений необходимо перевести секундомер в режим №3. Выведите груз из положения равновесия на небольшой угол 5-10°. Отпустите груз и нажмите кнопку «Пуск» секундомера. Отсчитайте время $T_{изм}$ равное 10 колебаниям и нажмите кнопку «Стоп/Сброс» секундомера. Период колебаний можно рассчитать по формуле $T_i= T_{изм}/10$.

Рекомендуемое задание

1. Установите минимальное значение массы груза. Установите максимальную длину нити l_{max}
2. Измерьте период колебаний T.
3. Увеличивая массу груза, измерьте соответствующие периоды. Убедитесь в том, что период колебаний математического маятника не зависит от массы груза.
4. Оставьте максимальное значение груза. Уменьшая длину нити на величину Δl_i, найдите значения T_i^2. Проведите 3 измерения.
5. По результатам измерений постройте график функции $T^2=f(\Delta l)$.
6. По формуле (10) на линейном участке найдите приращения функций и рассчитайте g. Сравните полученный результат с теоретическим (g_T=9.807м/с^2);