

010106. Упругое соударение шаров.

Требуемое оборудование

Модульно учебные комплексы:

1. Модульный учебный комплекс МУК-М2;

Приборы:

- | | |
|------------------------------------|-------|
| 1. Блок секундомер электронный СЭ1 | 1 шт. |
| 2. Блок механический БМ2 | 1 шт. |

Краткое теоретическое введение

Абсолютно упругим называется удар, при котором не происходит превращение механической энергии соударяющихся тел в другие виды энергии. В частности, не наблюдается нагревание тел при ударе. При абсолютно упругом ударе деформация тел, возникающая в момент удара, после его завершения полностью исчезает. Очень близким к упругому является удар стальных шаров.

В работе рассматривается соударение двух стальных шаров с массами m_1 и m_2 , закрепленных на подвесах одинаковой длины. Теоретически удобно рассматривать абсолютно упругий удар в системе отсчета центра масс двух шаров (в Ц-системе). Объясняется это тем, что в Ц-системе векторная сумма импульсов шаров до удара равна нулю. Покажем это. Назовем систему отсчета, связанную с землей К-системой. В К-системе скорость центра масс двух шаров равна

$$\vec{V}_c = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \vec{V}_{10} + m_2 \vec{V}_{20})$$

где \vec{V}_{10} - вектор скорости шара m_1 ,

\vec{V}_{20} - вектор скорости шара m_2 .

Импульсы шаров в К-системе равны:

$$\vec{P}_1 = m_1 \vec{V}_{10}, \quad \vec{P}_2 = m_2 \vec{V}_{20}.$$

Найдем выражение импульсов шаров в Ц-системе через скорости в К-системе. Величины, определенные относительно Ц-системы, будем помечать значком "˜" (тильда).

$$\begin{aligned}\vec{\tilde{P}}_{10} &= m_1 \vec{\tilde{V}}_{10} = m_1 (\vec{V}_{10} - \vec{V}_c) = m_1 \left(\vec{V}_{10} - \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \vec{V}_{10} + m_2 \vec{V}_{20}) \right) = \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{V}_{10} - \vec{V}_{20}) = \mu (\vec{V}_{10} - \vec{V}_{20})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\tilde{P}}_{20} &= m_2 \vec{\tilde{V}}_{20} = m_2 (\vec{V}_{20} - \vec{V}_c) = m_2 \left(\vec{V}_{20} - \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \vec{V}_{10} + m_2 \vec{V}_{20}) \right) = \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{V}_{20} - \vec{V}_{10}) = \mu (\vec{V}_{20} - \vec{V}_{10})\end{aligned}$$

Из полученных формул видно, что, действительно,

$$\vec{\tilde{P}}_{10} + \vec{\tilde{P}}_{20} = 0.$$

Величину $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ называют приведенной массой.

Время удара можно считать настолько малым, что подвесы достаточно массивных шаров не успевают отклониться за это время от вертикального положения. Это позволяет во время удара считать механическую систему, состоящую из двух шаров, **замкнутой в горизонтальном направлении** (вдоль оси X). Следовательно, для составляющей вектора импульса механической системы, параллельной оси X , должен выполняться закон сохранения. Это означает, что сразу **после удара** в Ц-системе векторная сумма составляющих импульсов шаров, параллельных оси X , равна нулю, как и до удара.

Если при этом учесть, что векторы импульсов $\vec{\tilde{P}}_{10}$ и $\vec{\tilde{P}}_{20}$ за мгновение до удара и векторы импульсов $\vec{\tilde{P}}_{11}$ и $\vec{\tilde{P}}_{21}$ сразу после удара направлены горизонтально, то равной нулю можно считать не только сумму составляющих, но и сумму самих векторов $\vec{\tilde{P}}_{11}$ и $\vec{\tilde{P}}_{21}$:

$$\vec{\tilde{P}}_{11} + \vec{\tilde{P}}_{21} = 0.$$

Иначе говоря, в результате упругого удара импульсы каждого шара в Ц-системе меняют направление на противоположное, не меняясь по величине (рис.1).

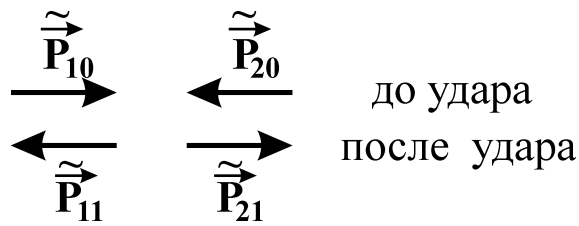


Рис.1

Поскольку импульсы в Ц-системе обоих шаров имеют одинаковые приведенные массы μ , то

$$\vec{V}_{11} = -\vec{V}_{10},$$

$$\vec{V}_{21} = -\vec{V}_{20}.$$

Теперь найдем скорости шаров \vec{V}_{11} и \vec{V}_{21} после удара в К-системе. Так как

$$\vec{V}_{11} = \vec{V}_{11} - \vec{V}_c,$$

то

$$\vec{V}_{11} = \vec{V}_{11} + \vec{V}_c = -\vec{V}_{10} + \vec{V}_c = -(\vec{V}_{10} - \vec{V}_c) + \vec{V}_c = 2\vec{V}_c - \vec{V}_{10}.$$

Аналогично

$$\vec{V}_{21} = \vec{V}_{21} + \vec{V}_c = -\vec{V}_{20} + \vec{V}_c = -(\vec{V}_{20} - \vec{V}_c) + \vec{V}_c = 2\vec{V}_c - \vec{V}_{20}.$$

Итак, векторы скорости первого и второго шаров сразу после удара в К-системе равны

$$\vec{V}_{11} = 2\vec{V}_c - \vec{V}_{10}, \tag{1}$$

$$\vec{V}_{21} = 2\vec{V}_c - \vec{V}_{20}. \tag{2}$$

Теперь учтем, что в наших опытах за мгновение до первого упругого удара шар m_1 движется вдоль оси X со скоростью \vec{V}_{10} , а шар m_2 неподвижен $|\vec{V}_{20}| = 0$. Причем упругое соударение носит лобовой характер.

Следовательно, в проекциях на ось X скорости шаров сразу после удара в К-системе равны:

$$\begin{aligned}
 V_{11X} &= \frac{2}{m_1 + m_2} (m_1 V_{10X} + m_2 \cdot 0) - V_{10X} = \\
 &= \frac{2m_1 - m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot V_{10X} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot V_{10X}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

$$V_{21X} = \frac{2}{m_1 + m_2} (m_1 V_{10X} + m_2 \cdot 0) - 0 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot V_{10X}.
 \tag{4}$$

Анализ формул (3) и (4) показывает следующее:

- 1) Если $m_1 < m_2$ то $V_{11X} < 0$. Это означает, что после упругого удара шаром меньшей массы по неподвижному шару с большей массой, меньший шар после удара движется в обратную сторону;
- 2) Если $m_1 = m_2 = m$, то $V_{11X} = 0$, а $mV_{21X} = mV_{10X}$. При равенстве масс упруго соударяющихся шаров в результате упругого удара первый шар останавливается, а второй начинает двигаться с импульсом первого шара.
- 3) Если $m_1 > m_2$, то $V_{11X} > 0$. Это означает, что оба шара после удара движутся в положительном направлении оси X .

Рассмотрим интересный физический эффект, наблюдающийся при упругом повторном соударении шара массы m_1 с первоначально неподвижным шаром массы m_2 .

Будем считать, что периоды колебаний шаров одинаковы. Тогда после первого соударения шары, отклонившись от первого положения равновесия, повторно столкнутся в той же нижней точке их траекторий. За время одного колебания потери механической энергии каждого шара, связанные с работой силы сопротивления воздуха, малы. Это позволяет считать, что их скорости за мгновение до повторного удара равны по модулю скоростям шаров сразу после первого удара, но направления скоростей противоположны.

Сказанное означает, что скорость центра масс шаров при повторном ударе равна по величине и противоположно по направлению скорости центра масс при первом ударе.

Действительно, в проекциях на ось X получим:

при первом ударе скорость центра масс шаров равна

$$V_{CX} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 V_{10X} - m_2 \cdot 0) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_{10X},
 \tag{5}$$

а при втором ударе

$$V_{CX} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left(m_1 \frac{[-(m_1 - m_2)]}{(m_1 + m_2)} V_{10X} - m_2 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{10X} \right) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} V_{10X}. \quad (6)$$

Пользуясь формулами (1) и (2), получаем скорости первого V_{12X} и второго V_{22X} шаров после второго удара:

$$V_{12X} = 2V_{CX} - (-V_{11X}) = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{10X} - \left(-\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{10X} \right) = -V_{10X}. \quad (7)$$

$$V_{22X} = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{10X} - (-V_{21X}) = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{10X} - \left(-\frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{10X} \right) = 0. \quad (8)$$

Из полученных выражений следует, что в результате второго удара шар m_2 , который до первого удара покоился, опять останавливается, а шар m_1 приобретает кинетическую энергию, равную энергии перед первым ударом. Последнее означает, что после второго удара шар m_1 должен отклониться почти на тот же угол, с которого он был отпущен электромагнитом в начале опыта.

Методика эксперимента

Лабораторная установка для изучения упругого удара (рис.2) представляет собой два стальных шара 1 и 2 с массами m_1 и m_2 , закрепленных на бифилярных подвесах 3. Расстояние от оси вращения шаров до их центров масс равно L . Шар m_1 может удерживаться в отклоненном положении электромагнитом 4. Положение электромагнита может изменяться за счет поворота штанги 5. Начальный угол отклонения подвеса шара m_1 от вертикального положения определяется с помощью поворотного индикатора 6 и шкалы 7. Этот же индикатор позволяет определить максимальный угол отклонения шара m_1 после удара. Максимальный угол отклонения шара m_2 измеряется с помощью второго поворотного индикатора 8 со шкалой 9. Устройство 10 позволяет предотвратить отклонение шара m_2 после соударения с шаром m_1 , если это необходимо. Для этого его устанавливают в вертикальное положение. Управление электромагнитом осуществляется с помощью блока 11.

Величинами, которые будут измеряться в опытах, являются не скорости, а углы отклонения подвесов шаров от положения равновесия. Используя полученные выражения для скоростей, получим формулы для углов отклонения каждого из шаров после первого удара.

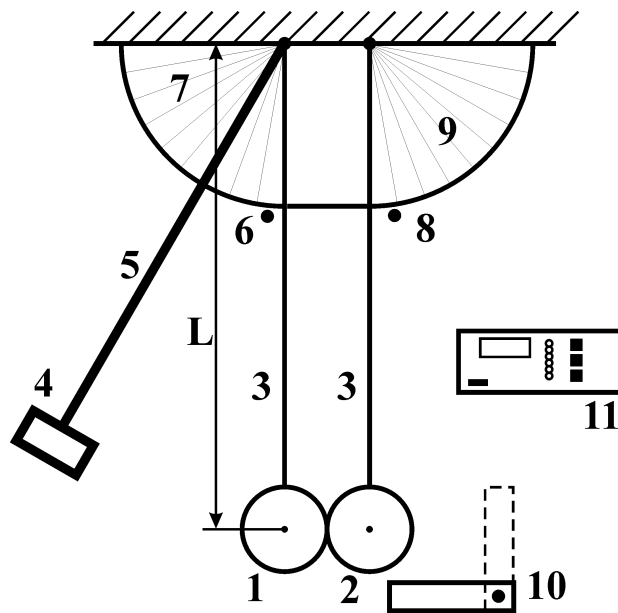


Рис. 2

Пусть удерживаемый электромагнитом шар m_1 имеет подвес, расположенный под углом α_{10} к вертикальному направлению. Если расстояние от оси вращения до центра масс шара равно L , то в таком положении центр масс поднят на высоту h_{10} , которая равна

$$h_{10} = L(1 - \cos \alpha_{10}). \quad (9)$$

Считаем, что в положении равновесия центр масс шара расположен на нулевой высоте. Из закона сохранения механической энергии следует

$$m_1 g h_{10} = \frac{m_1 V_{10X}^2}{2} \quad (10)$$

Следовательно,

$$V_{10X} = \sqrt{2gh_{10}} = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha_{10})} \quad (11)$$

Из формулы (3), подставляя (11), получаем

$$V_{11X} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha_{10})}. \quad (12)$$

Угол отклонения подвеса первого шара после первого удара обозначим α_{11} . Связь этого угла с высотой подъема после первого удара h_{11} имеет вид:

$$h_{11} = L(1 - \cos \alpha_{11}) \quad (13)$$

Опять пользуемся законом сохранения механической энергии

$$m_1 g h_{11} = \frac{m_1 V_{11X}^2}{2}, \quad (14)$$

$$2gh_{11} = V_{11X}^2. \quad (15)$$

Подставляя (11) в (13), получаем

$$2gL(1 - \cos \alpha_{11}) = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 [2gL(1 - \cos \alpha_{10})].$$

После сокращений и преобразований получим рабочую формулу для косинуса угла отклонения первого шара после первого удара:

$$\cos \alpha_{11} = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 (1 - \cos \alpha_{10}). \quad (16)$$

Рассуждая таким же образом, получим рабочую формулу для косинуса угла отклонения α_{21} второго шара после первого удара:

$$\begin{aligned} h_{21} &= L(1 - \cos \alpha_{21}); \\ V_{21X} &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha_{01})}; \\ 2gL(1 - \cos \alpha_{21}) &= \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 [2gL(1 - \cos \alpha_{01})]; \\ \cos \alpha_{21} &= 1 - \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 (1 - \cos \alpha_{10}). \end{aligned} \quad (17)$$

Пользуясь рабочими формулами (16) и (17), найдем, при каком отношении масс шаров $\frac{m_1}{m_2}$ их отклонения после первого удара будут одинаковыми.

При $\alpha_{11} = \alpha_{21}$ из (14) и (15) получим $(m_1 - m_2)^2 = (2m_1)^2$.

Возведя в квадрат и разделив равенство на m_1 , приходим к уравнению

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 - 2\left(\frac{m_2}{m_1}\right) - 3 = 0.$$

Решив, получаем, что отклонения шаров после первого удара будут одинаковыми, если отношение массы второго шара к массе первого равно

$$\frac{m_2}{m_1} = 3. \quad (18)$$

Рекомендуемое задание к работе

1. Убедитесь, что в качестве шара m_1 вначале используется шар меньшей массы. Если это не так, закрепите его. Шар m_2 должен иметь большую массу.
2. Включите электронный блок управления электромагнитом.
3. Подведите к электромагниту шар m_1 . Убедитесь, что он удерживается электромагнитом. Установите поворотом штанги 5 начальный угол α_{10} отклонения подвеса шара m_1 от вертикали. Пользуясь поворотным индикатором 6 и шкалой 7 (см. рис. 1), измерьте этот угол.
4. Подготовьте поворотный индикатор 8 к измерению отклонения шара m_2 . Для этого установите его в положение близкое к 0^0 .
5. Нажатием кнопки на электронном блоке отключите питание электромагнита и освободите шар m_1 .
6. Снимите показания со шкалы 9 и запишите полученное значение угла α_{21} .
7. Нажатием кнопки «Стоп» включите питание электромагнита и вновь подведите к нему шар m_1 .
8. Подготовьте поворотный индикатор 6 для определения угла отклонения шара m_1 после первого удара. Для этого установите его в положение близкое к 0^0 . Установите устройство 10 в

вертикальное положение. Это не позволит шару m_1 после повторного удара изменить показания поворотного индикатора 6.

9. Нажатием кнопки на электронном блоке отключите питание электромагнита и освободите шар m_1 .

10. Снимите показание со шкалы 7 и запишите полученное значение угла α_{11} .

11. Полученные экспериментальные результаты сравните с теоретическими, получив их с помощью формул (12) и (13). Если оказалось, что $\alpha_{11} \approx \alpha_{21}$, проверьте, выполняется ли соотношение (14).

12. Повторите п.п. 2 — 10 для других значений начального угла α_{10} , изменив его поворотом штанги 5.

13. Снимите шар малой массы и замените его шаром, масса которого равна массе шара m_2 .

14. Уберите устройство 10, препятствующее отклонению второго шара.

15. Проведите качественный опыт (без измерений) с шарами равной массы. Убедитесь, что, действительно, при ударе они обмениваются импульсами и энергиями.

16. Опять верните на место шар малой массы m_1 . Проведите опыты с целью наблюдения особенностей второго упругого удара. Убедитесь, что шар большей массы m_2 после второго удара останавливается, а шар m_1 отклоняется почти на первоначальный угол α_{10} .

17. Поменяйте малый и большой шары местами и повторите п.17. Убедитесь, что эффект остановки наблюдается и в этом случае.